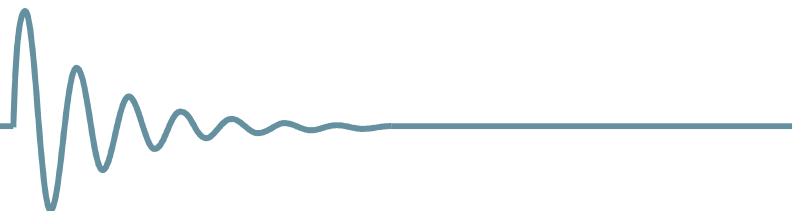


Tema 3

Representación de Fourier: propiedades



Propiedad de linealidad (I)

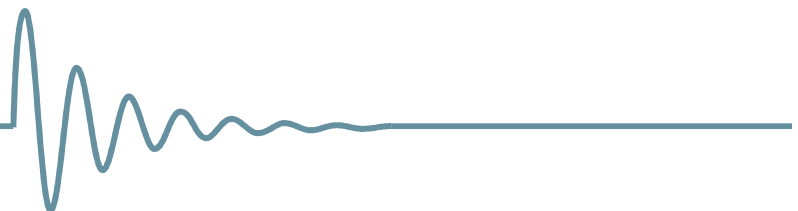
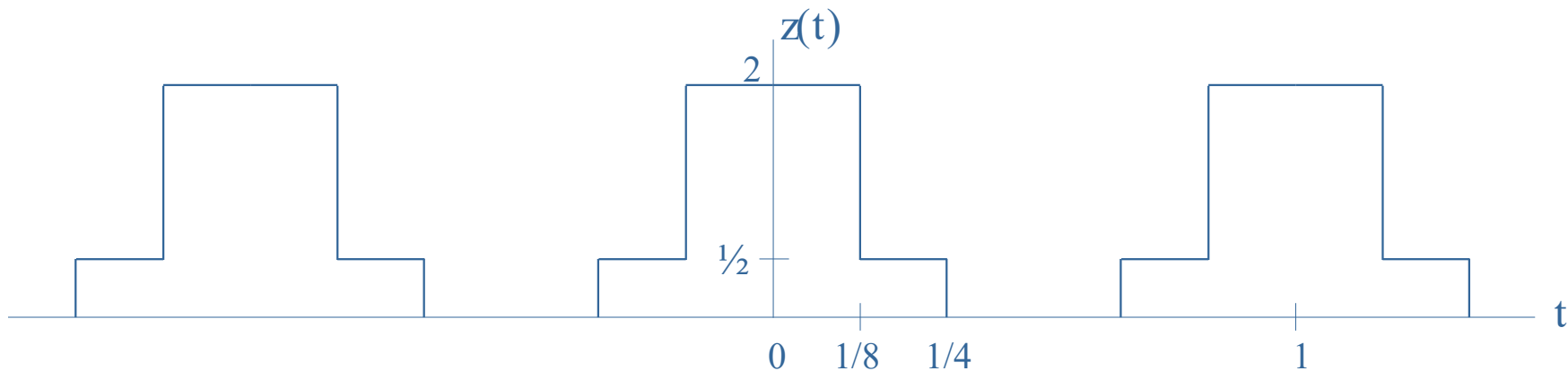
$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

$$z(t) = ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FS; \omega_0} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

$$z[n] = ax[n] + b[n] \xleftrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = aX(e^{j\Omega}) + bY(e^{j\Omega})$$

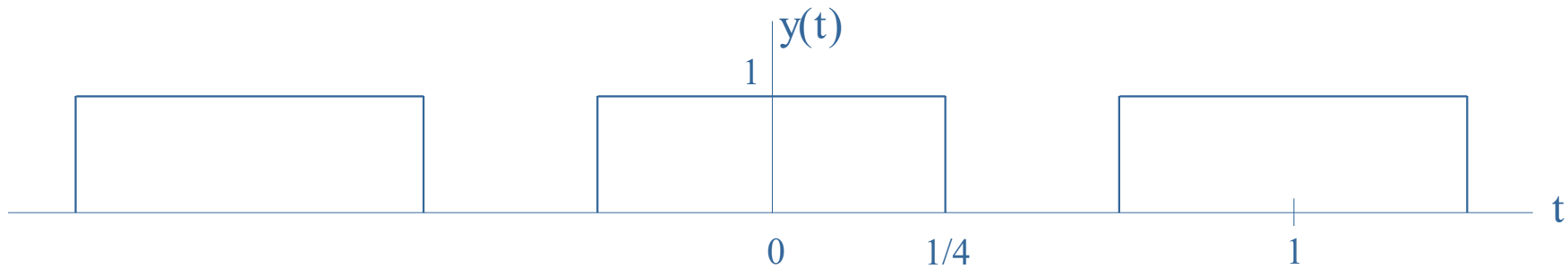
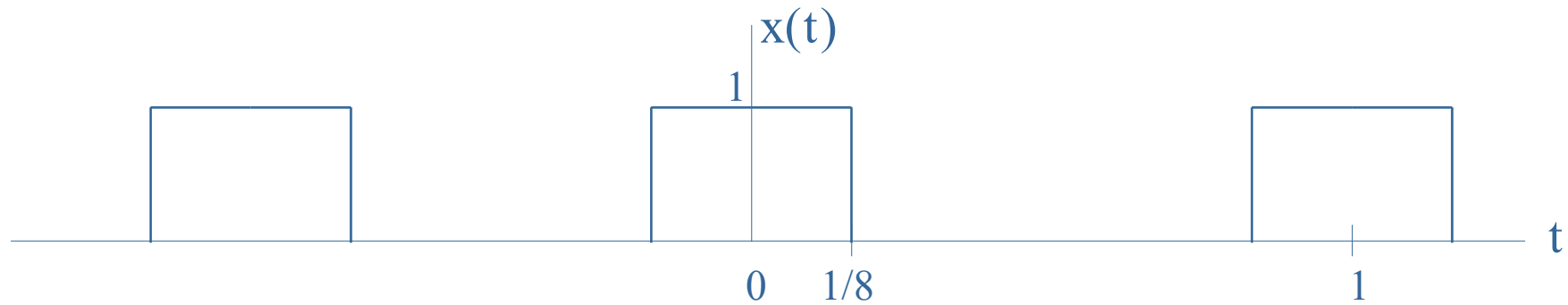
$$z[n] = ax[n] + by[n] \xleftrightarrow{DTFS; \Omega} Z[k] = aX[k] + bY[k]$$

- **Ejemplo:** Sea $z(t)$ una señal periódica. Calcular los coeficientes de la serie de Fourier a partir de la propiedad de linealidad

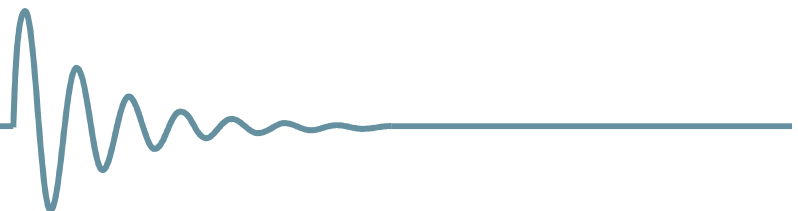


Propiedades de linealidad (II)

- Solución:



$$z(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$$



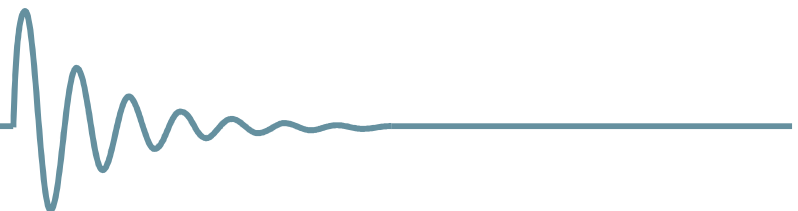
Propiedad de linealidad (III)

- Coeficientes de Fourier de las señales $x(t)$ e $y(t)$:

$$X[k] = \frac{\sin(k\omega_0 T_s)}{k\pi} = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{4}\right); \quad Y[k] = \frac{\sin(k\omega_0 T_s)}{k\pi} = \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

- Aplicando la propiedad de linealidad

$$Z[k] = \frac{3}{2} \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{k\pi} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$



Propiedad de simetría (I)

- **Señales reales:** Si $x(t)$ es real, $x(t) = x^*(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

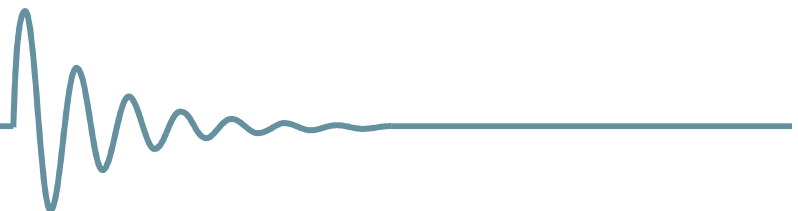
Calculamos el complejo conjugado de la transformada

$$X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

como $x(t)$ es real, $x(t) = x^*(t)$, y podemos escribir:

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = X(-j\omega)$$

Luego, $X(j\omega)$ tiene simetría conjugada



Propiedad de simetría (II)

- Si $x(t)$ es real:

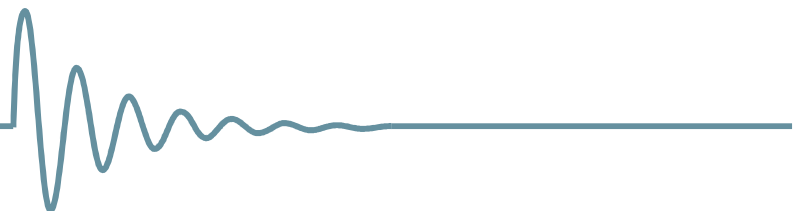
$$x(t) = x^*(t) \text{ y } X(j\omega) = X^*(-j\omega)$$

- Equivalentemente:

- $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\}$
- $\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\}$

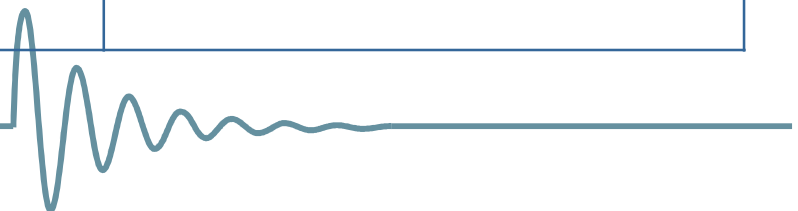
Conclusión:

- Si $x(t)$ es real, la parte real de su transformada es una función par de la frecuencia
- Si $x(t)$ es real, la parte imaginaria de su transformada es una función impar de la frecuencia



Propiedad de simetría (III)

	Forma Compleja	Forma Rectangular	Forma Polar
FT	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ $(X^*(j\omega) = X(-j\omega))$	$Re\{X(j\omega)\} = Re\{X(-j\omega)\}$ $Im\{X(j\omega)\} = -Im\{X(-j\omega)\}$	$ X(j\omega) = X(-j\omega) $ $arg\{X(j\omega)\} = -arg\{X(-j\omega)\}$
FS	$X[k] = X^*[-k]$ $(X^*[k] = X[-k])$	$Re\{X[k]\} = Re\{X[-k]\}$ $Im\{X[k]\} = -Im\{X[-k]\}$	$ X[k] = X[-k] $ $arg\{X[k]\} = -arg\{X[-k]\}$
DTFT	$X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$ $(X^*(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega}))$	$Re\{X(e^{j\Omega})\} = Re\{X(e^{-j\Omega})\}$ $Im\{X(e^{j\Omega})\} = -Im\{X(e^{-j\Omega})\}$	$ X(e^{j\Omega}) = X(e^{-j\Omega}) $ $arg\{X(e^{j\Omega})\} = -arg\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X[k] = X^*[-k]$ $(X^*[k] = X[-k])$	$Re\{X[k]\} = Re\{X[-k]\}$ $Im\{X[k]\} = -Im\{X[-k]\}$	$ X[k] = X[-k] $ $arg\{X[k]\} = -arg\{X[-k]\}$



Propiedad de simetría (IV)

- **Señales complejas**

- Si $x(t)$ es imaginaria pura, $x(t) = -x^*(t)$

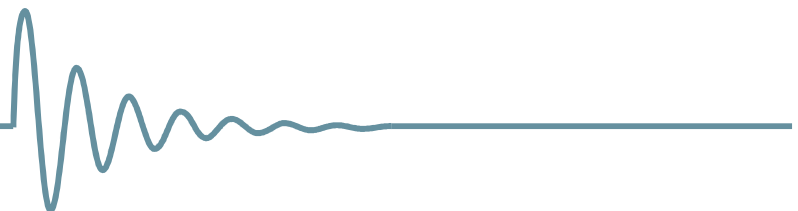
$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

Calculamos el complejo conjugado de la transformada:

$$X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt$$

Sabemos que $x(t)$ es imaginaria pura:

$$X^*(j\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j(-\omega)t} dt = -X(-j\omega)$$



Propiedad de simetría (V)

- Si $x(t)$ es imaginaria pura:

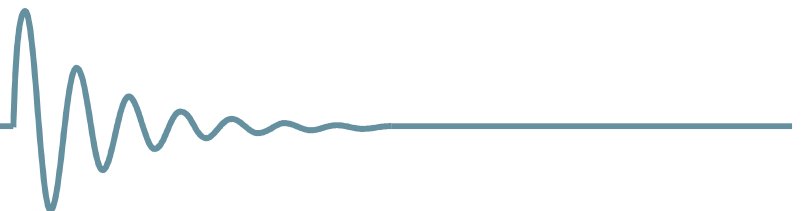
$$x(t) = -x^*(t) \text{ y } X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$$

– Equivalentemente:

- $\text{Re}\{X(j\omega)\} = -\text{Re}\{X(-j\omega)\}$
- $\text{Im}\{X(j\omega)\} = \text{Im}\{X(-j\omega)\}$

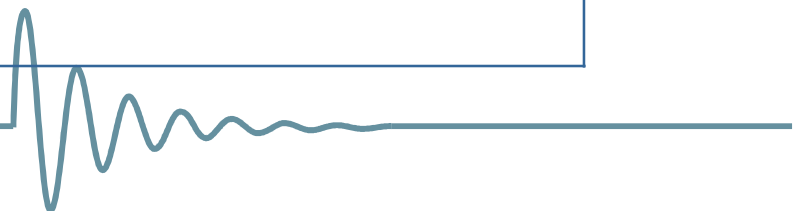
Conclusión:

- Si $x(t)$ es imaginario puro, la parte real de su transformada es una función impar de la frecuencia
- Si $x(t)$ es imaginario puro, la parte imaginaria de su transformada es una función par de la frecuencia



Propiedad de simetría (VI)

	Forma Compleja	Forma Rectangular
FT	$X(j\omega) = -X^*(-j\omega)$ $(X^*(j\omega) = -X(-j\omega))$	$\text{Re}\{X(j\omega)\} = -\text{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\text{Im}\{X(j\omega)\} = \text{Im}\{X(-j\omega)\}$
FS	$X[k] = -X^*[-k]$ $(X^*[k] = -X[-k])$	$\text{Re}\{X[k]\} = -\text{Re}\{X[-k]\}$ $\text{Im}\{X[k]\} = \text{Im}\{X[-k]\}$
DTFT	$X(e^{j\Omega}) = -X^*(e^{-j\Omega})$ $(X^*(e^{j\Omega}) = -X(e^{-j\Omega}))$	$\text{Re}\{X(e^{j\Omega})\} = -\text{Re}\{X(e^{-j\Omega})\}$ $\text{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = \text{Im}\{X(e^{-j\Omega})\}$
DTFS	$X[k] = -X^*[-k]$ $(X^*[k] = -X[-k])$	$\text{Re}\{X[k]\} = -\text{Re}\{X[-k]\}$ $\text{Im}\{X[k]\} = \text{Im}\{X[-k]\}$



Propiedad de simetría (VII)

■ Señales reales y pares

- Si $x(t)$ es real y par: $x(t) = x^*(t)$ y $x(t) = x(-t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

Calculamos el complejo conjugado de la transformada

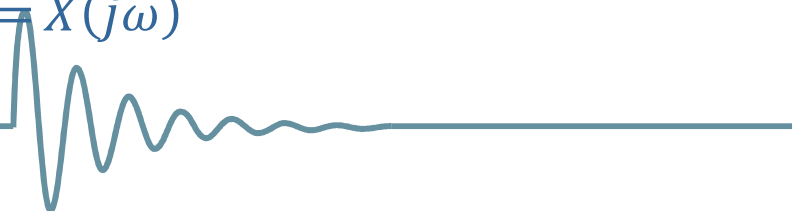
$$X^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{j\omega t} dt$$

Como la señal $x(t)$ es real y par podemos escribir:

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{-j(-\omega)t} dt$$

- Hacemos el cambio de variable $\tau = -t$

$$X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega)$$



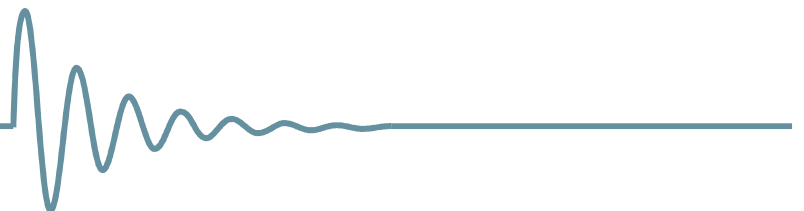
Propiedad de simetría (VIII)

- Si $x(t)$ es una señal real y par, su transformada $X(j\omega)$ es real

$$x(t) = x^*(t) \text{ y } x(t) = x(-t) \Rightarrow X^*(j\omega) = X(j\omega)$$

- Si $x(t)$ es una señal real e impar, su transformada es $X(j\omega)$ es imaginaria pura

$$x(t) = x^*(t) \text{ y } x(t) = -x(-t) \Rightarrow X^*(j\omega) = -X(j\omega)$$



Propiedad de desplazamiento (I)

- Propiedad de desplazamiento en el tiempo

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = x(t - t_0) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = ?$$

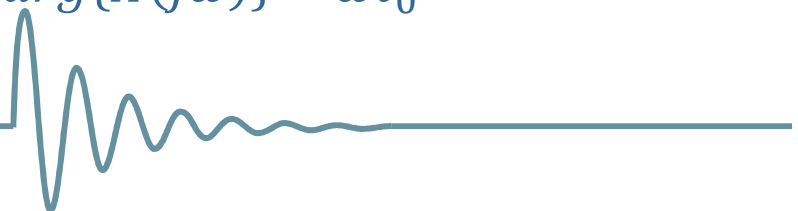
$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

– Cambio de variable: $\tau = t - t_0$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega(\tau+t_0)} d\tau = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$$

Conclusión: Desplazar una señal un tiempo t_0 es equivalente a multiplicar su transformada por $e^{-j\omega t_0}$

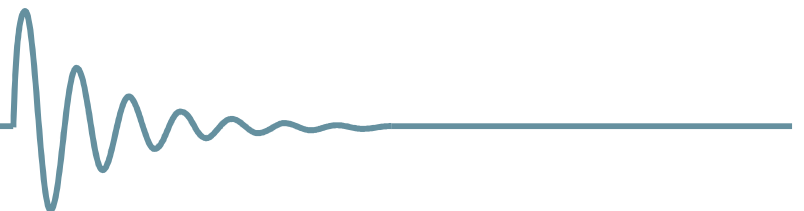
$$|Y(j\omega)| = |X(j\omega)|; \quad \arg\{Y(j\omega)\} = \arg\{X(j\omega)\} - \omega t_0$$



Propiedad de desplazamiento (II)

Un desplazamiento en el dominio del tiempo deja inalterada la magnitud del espectro e introduce un desplazamiento en la fase que es una función lineal de la frecuencia. La pendiente del término de fase es el desplazamiento t_0

$$\begin{aligned}x(t - t_0) &\overset{FT}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega) \\x(t - t_0) &\overset{FS; \omega_0}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} X[k] \\x[n - n_0] &\overset{DTFT}{\longleftrightarrow} e^{-j\Omega n_0} X(e^{j\Omega}) \\x[n - n_0] &\overset{DTFS; \Omega_0}{\longleftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 n_0} X[k]\end{aligned}$$



Propiedad de desplazamiento (III)

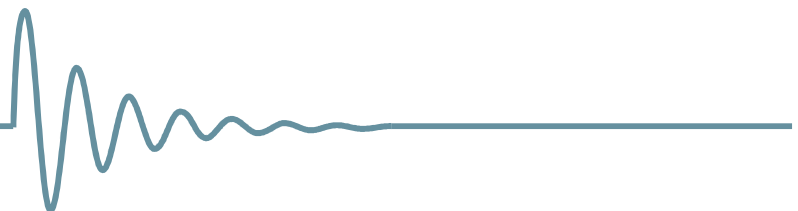
- Propiedad de desplazamiento en la frecuencia

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = ? \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega - j\gamma)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\gamma) e^{j\omega t} d\omega$$

- Cambio de variable $\eta = \omega - \gamma$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j(\eta+\gamma)t} d\eta = \frac{1}{2\pi} e^{j\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\eta) e^{j\eta t} d\eta = e^{j\gamma t} x(t)$$

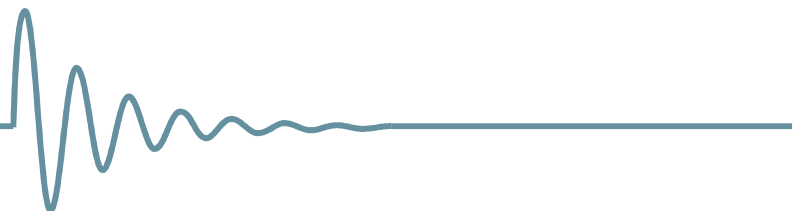


Propiedad de desplazamiento (IV)

Conclusión: Un desplazamiento en frecuencia se corresponde con una multiplicación en el dominio del tiempo por una exponencial compleja de igual frecuencia que el desplazamiento, $e^{j\gamma}$

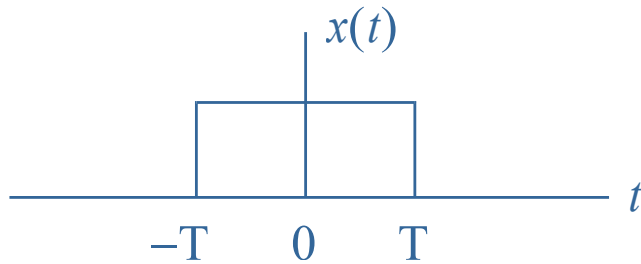
$$\begin{aligned} e^{j\gamma t} x(t) &\xleftrightarrow{FT} X(j\omega - j\gamma) \\ e^{jk\omega_0 t} x(t) &\xleftrightarrow{FS; \omega_0} X[k - k_0] \\ e^{j\Gamma n} x[n] &\xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j(\Omega - \Gamma)}) \\ e^{jk\Omega_0 n} x[n] &\xleftrightarrow{DTFS; \Omega_0} X[k - k_0] \end{aligned}$$

Un desplazamiento en un dominio, bien en el tiempo bien en la frecuencia, implica una multiplicación por una exponencial compleja en el otro (DUALIDAD)

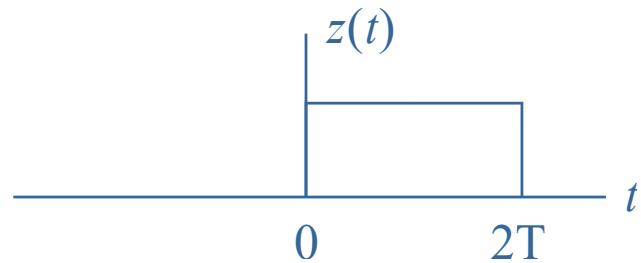


Propiedad de desplazamiento (V)

- **Ejemplo:** Obtener la transformada de Fourier del pulso $z(t)$ a partir del espectro de $x(t)$



$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T \\ 0, & |t| > T \end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$$

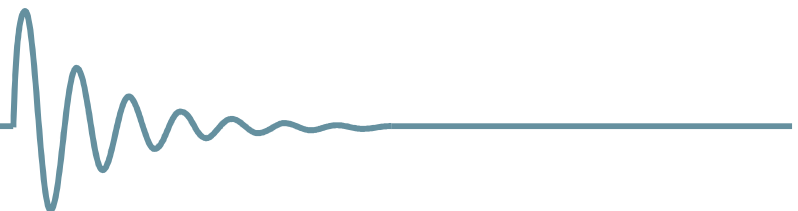


$z(t)$ es el pulso $x(t)$ retrasado T segundos:

$$z(t) = x(t - T)$$

Aplicando la propiedad de desplazamiento:

$$Z(j\omega) = e^{-j\omega t_0} X(j\omega) = e^{-j\omega T} X(j\omega) = e^{-j\omega T} \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega}$$



Propiedad de desplazamiento (VI)

- **Ejemplo:** Calcular la transformada del pulso $z(t)$

$$z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

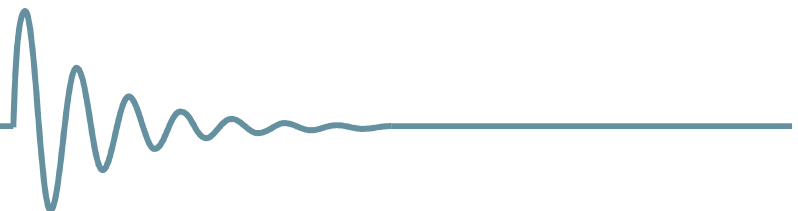
- Escribimos $z(t)$ como $z(t) = e^{j10t}x(t)$ siendo $x(t)$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega\pi)}{\omega}$$

- Por la propiedad de desplazamiento: $e^{j\gamma t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega - j\gamma)$

$$z(t) = e^{j10t}x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega - j10)$$

$$Z(j\omega) = \frac{2}{\omega - 10} \sin((\omega - 10)\pi)$$



Propiedad de escalado temporal (I)

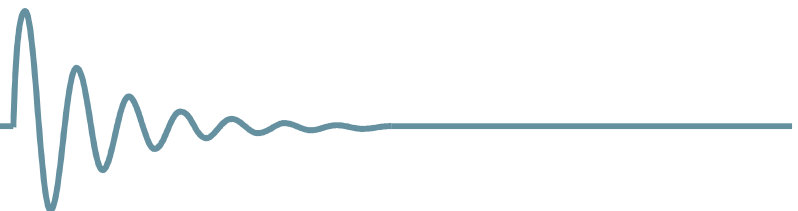
- Señales continuas aperiódicas: FT

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = x(at) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = ?$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t} dt$$

– Cambio de variable: $\tau = at$; $dt = \frac{1}{a} d\tau$

$$Y(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau, & a > 0 \\ \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau, & a < 0 \end{cases}$$



Propiedad de escalado temporal (II)

Combinando ambas integrales

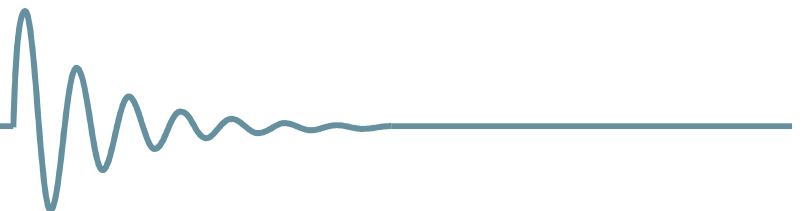
$$Y(j\omega) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

Conclusión: El escalado de una señal en el tiempo introduce un escalado inverso en el dominio de la frecuencia así como un escalado en amplitud

- **Ejemplo:** Calcular, aplicando la propiedad de escalado, la FT del siguiente pulso rectangular escalado

$$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases}$$

Si se conoce la FT de $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$



Propiedad de escalado temporal (III)

Sabemos que:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega} = 2T_1 \text{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

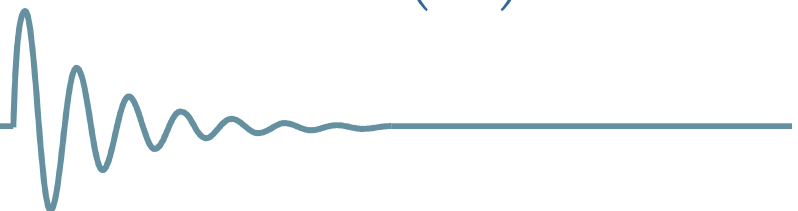
$$\text{Como } T_1 = 1, X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} = 2 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$$

Vemos que $y(t) = x(t/2)$. Aplicando la propiedad de escalado con $a = 1/2$:

$$Y(j\omega) = 2X(j2\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(2\omega) = 4 \text{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$$

Si hubiésemos calculado directamente la transformada:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases} \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega 2)}{\omega} = 4 \text{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$$



Propiedad de escalado temporal (IV)

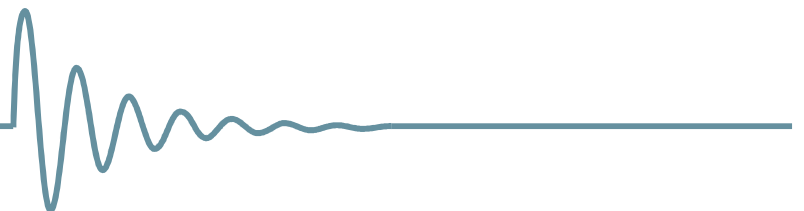
■ Señales continuas y periódicas: FS

$$x(t) \xleftrightarrow{FS; \omega_0} X[k]; \quad y(t) = x(at) \xleftrightarrow{FS; ?} Y[k] = ?$$

- $a > 0$: si $x(t)$ tiene periodo fundamental T , entonces $y(t)$ es periódica de periodo T/a y por tanto la frecuencia fundamental de $x(t)$ es ω_0 y la de $y(t)$ es $a\omega_0$

$$Y[k] = \frac{a}{T} \int_{\langle T/a \rangle} y(t) e^{-jka\omega_0 t} dt = \frac{a}{T} \int_{\langle T/a \rangle} x(at) e^{-jka\omega_0 t} dt$$

- Cambio de variable: $\begin{cases} \tau = at \\ d\tau = a dt \end{cases}$

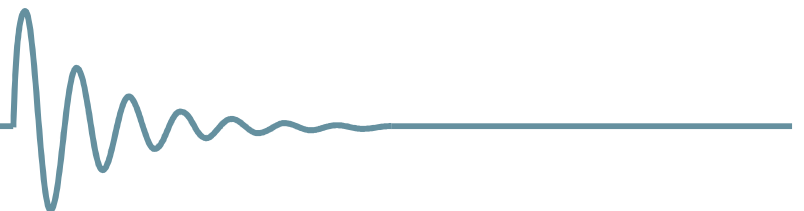


Propiedad de escalado temporal (V)

$$Y[k] = \frac{a}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = X[k]$$

Conclusión: la operación de escalado simplemente cambia el espaciado entre armónico de " ω_0 " a " $a\omega_0$ "

$$x(t) \xleftrightarrow{FS; \omega_0} X[k]; \quad y(t) = x(at) \xleftrightarrow{FS; a\omega_0} Y[k] = X[k], a > 0$$

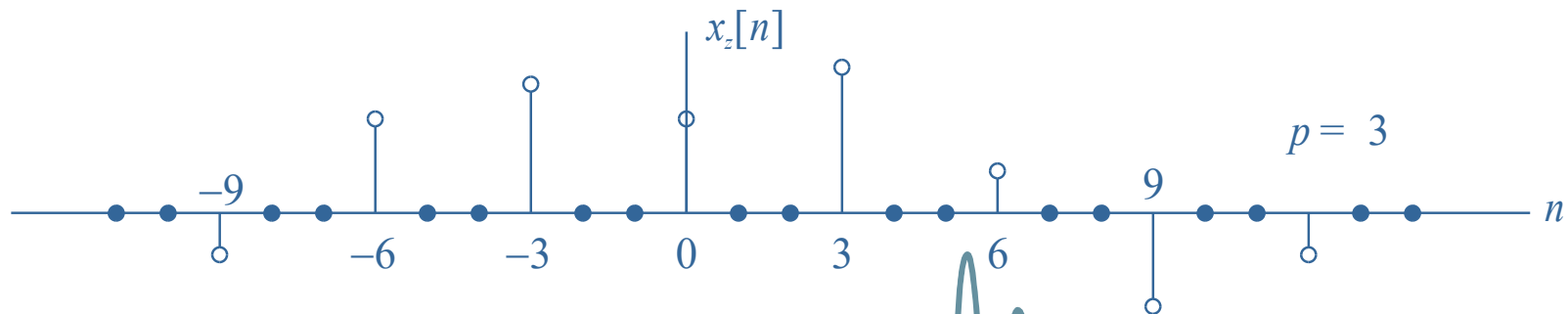


Propiedad de escalado temporal (VI)

■ Señales discretas

- Operación de escalado tiene carácter diferente en tiempo discreto
- $z[n] = x[pn]$ se define sólo para valores enteros de p
- Si $|p| > 1$, la operación de escalado descarta información puesto que sólo conserva cada p – ésimo valor de $x[n]$
- Esta pérdida de información impide expresar la DTFT / DTFS de $z[n]$ en términos de la DTFT / DTFS de $x[n]$ de forma análoga al caso continuo
- Solución: definir una secuencia nula excepto para múltiplos enteros del parámetro de escalado p :

$$x_z[n] = 0, \text{ excepto si } \frac{n}{p} \text{ es entero}$$



Propiedad de escalado temporal (VII)

- **Señales discretas aperiódicas: DTFT**

Si $x_z[n]$ es aperiódica, la secuencia escalada $z[n] = x_z[pn]$ también es aperiódica y la DTFT es la representación adecuada:

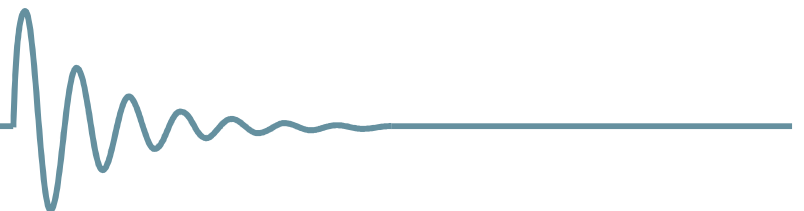
$$Z(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_z[pn]e^{-j\Omega n}$$

– Cambio de variable: $\begin{cases} m = pn \\ n = \frac{m}{p} \end{cases};$

$$Z(e^{j\Omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_z[m]e^{-j\Omega \frac{m}{p}} = X_z\left(e^{j\frac{\Omega}{p}}\right)$$

– En el caso de una reflexión, $p = -1$, intercalar ceros es innecesario y tenemos:

$$x[-n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{-j\Omega})$$



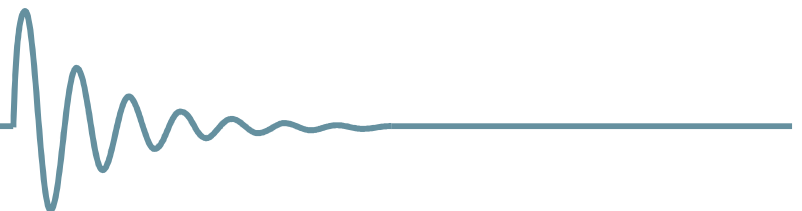
Propiedad de escalado temporal (VIII)

■ Señales discretas periódicas: DTFS

- Si $x_z[n]$ es periódica de periodo N , entonces $z[n] = x_z[pn]$ tiene periodo fundamental N/p .
- Se considera $p > 0$
- N es un entero múltiplo de p
- Por definición de $x_z[n]$, el periodo fundamental de $z[n]$ será siempre entero

$$x_z[pn] = z[n] \xleftrightarrow{DTFS; p\Omega_0} Z[k] = pX_z[k], p > 0$$

Conclusión: La operación de escalado cambia el espaciado entre armónicos de " Ω_0 " a " $p\Omega_0$ " y amplifica los coeficientes de la DTFS por un factor p



Propiedad de derivación respecto al tiempo (I)

- Señales continuas aperiódicas: FT

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = ?$$

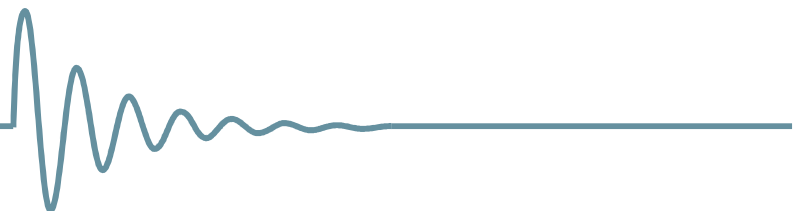
- $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Comparando : podemos decir que: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$

Conclusión: Derivar respecto a tiempo se corresponde con una multiplicación por $j\omega$ en el dominio de la frecuencia. La operación de derivación acentúa las componentes de alta frecuencia de la señal y anula la componente de continua



Propiedad de derivación respecto al tiempo (II)

■ Señales continuas periódicas: FS

$$x(t) \xleftrightarrow{FS; \omega_0} X[k]; \quad y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS; \omega_0} Y[k] = ?$$

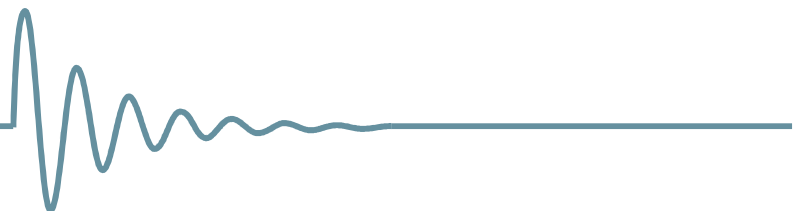
- $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\omega_0 t}$

Derivamos respecto al tiempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 X[k] e^{jk\omega_0 t}$$

Comparando podemos concluir que: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{FS; \omega_0} Y[k] = jk\omega_0 X[k]$

Conclusión: De nuevo se observa que la derivación fuerza a que el valor medio de la señal sea nulo y los coeficientes nulos para $k = 0$



Propiedad de derivación respecto a la frecuencia (I)

- Señales continuas aperiódicas: FT

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = ? \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

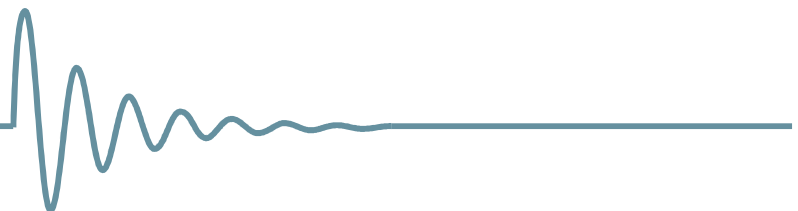
- $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

Derivamos respecto a la frecuencia

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\text{Luego, } y(t) = -jtx(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

Conclusión: Derivar en el dominio de la frecuencia es equivalente a multiplicar en el dominio del tiempo por $-jt$



Propiedad de derivación respecto a la frecuencia (II)

■ Señales discretas aperiódicas: DTFT

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}); \quad y[n] =? \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

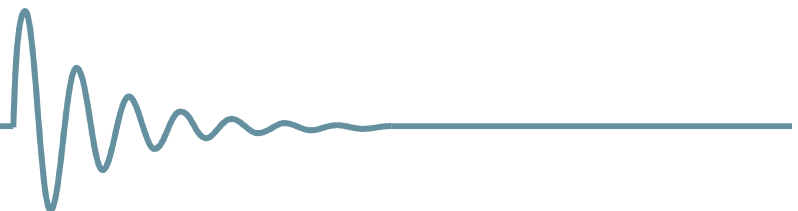
- $X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$

Derivamos respecto a la frecuencia

$$Y(e^{j\Omega}) = \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -jnx[n]e^{-j\Omega n}$$

$$\text{Luego, } y[n] = -jnx[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

Conclusión: Derivar en el dominio de la frecuencia es equivalente a multiplicar en el tiempo por $-jn$



Propiedad de integración en el tiempo (I)

- Señales continuas aperiódicas: FT

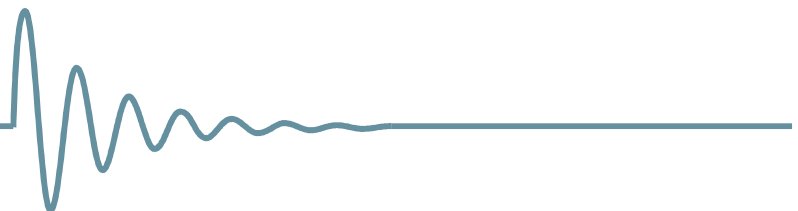
$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega); \quad y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = x(t)$$

Por la propiedad de derivación,

$$j\omega Y(j\omega) = X(j\omega) \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega)$$

Esta relación presenta una indeterminación en $\omega = 0$ ya que la operación de derivación anula cualquier componente de continua de $y(t)$ y por tanto $X(j0) = 0$, es decir, que la propiedad de derivación se aplica sólo a señales con valor medio nulo.



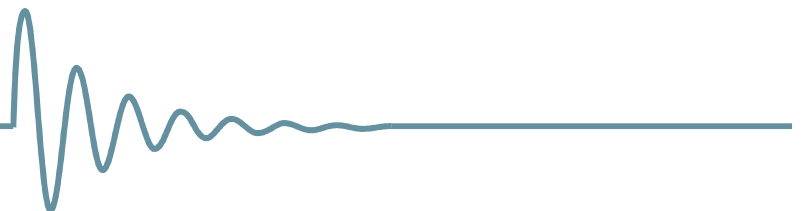
Propiedad de integración en el tiempo (II)

- Si el valor medio de $x(t)$ no es cero es posible que $\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \rightarrow \infty$ y, en consecuencia, la FT de $y(t)$ no converge

Para solucionar los problemas de convergencia se incluyen impulsos en la transformada

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega)$$

De esta forma, la integración puede verse como una operación de promediado y por lo tanto tiende a señales suaves en el tiempo



Propiedad de integración en el tiempo (III)

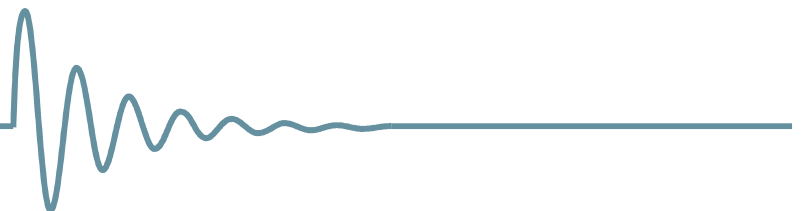
- **Ejemplo:** Calcular la FT de la función escalón $u(t)$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

Solución 1: Aplicamos la propiedad de integración

$$\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$$

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot 1 + \pi \cdot 1 \cdot \delta(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$



Propiedad de integración en el tiempo (IV)

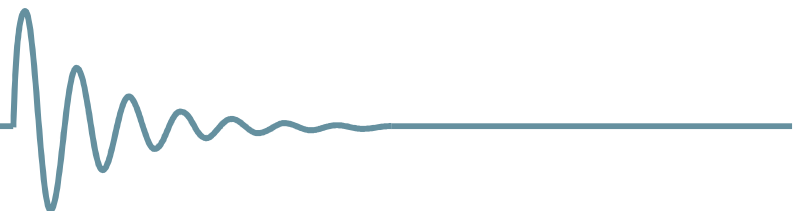
Solución 2: Considerar $u(t)$ como la suma de dos funciones:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(t), \quad \text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Sabemos que: $\frac{1}{2} \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega)$

$$\text{sign}(t) \xleftrightarrow{FT} S(j\omega); \quad \frac{d\text{sign}(t)}{dt} \xleftrightarrow{FT} j\omega S(j\omega)$$

$$\frac{d\text{sign}(t)}{dt} = 2\delta(t); \quad j\omega S(j\omega) = 2$$



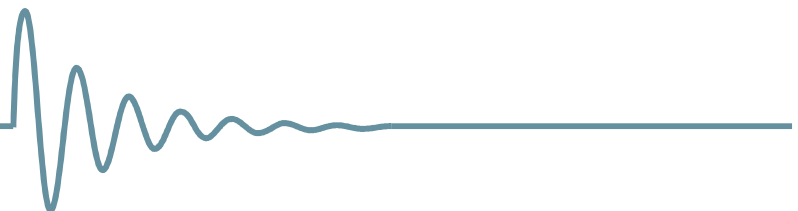
Derivación respecto a la frecuencia: FT (V)

$S(j0) = 0$ porque $sign(t)$ es impar y por tanto, su valor medio es nulo. Concluimos que:

$$S(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 0 \\ \frac{2}{j\omega}, & \omega \neq 0 \end{cases}$$

Y aplicando linealidad:

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



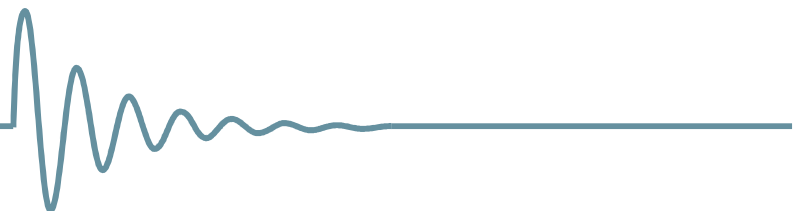
Suma y diferencia (I)

Para tiempos discretos la suma es equivalente a la integración de señales continuas y la diferencia se corresponde con la derivación continua

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$
$$x[n] = y[n] - y[n-1]$$

Sean $x[n]$ e $y[n]$ señales aperiódicas:

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) = (1 - e^{j\Omega})Y(e^{j\Omega})$$
$$y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{j\Omega}} X(e^{j\Omega}) + \pi X(e^{j0}) \delta(\Omega); \quad -\pi \leq \Omega \leq \pi$$
$$y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - e^{j\Omega}} X(e^{j\Omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k2\pi)$$



Convolución y modulación (I)

- Convolución aperiódica

- Sean $x(t)$ y $h(t)$ dos señales continuas y aperiódicas

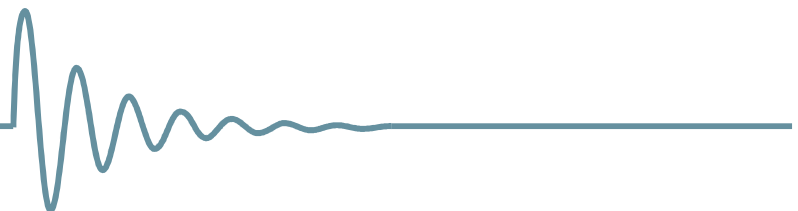
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

$$x(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega$$

Sustituyendo esta expresión en la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(t-\tau)}d\omega d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \right] X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$



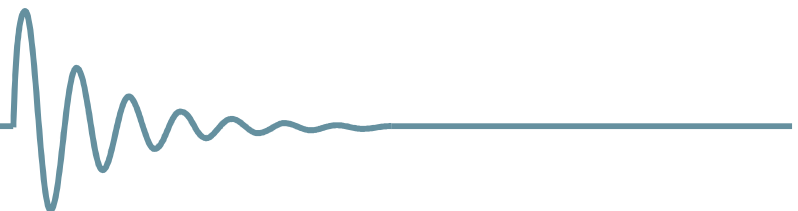
Convolución y modulación (II)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

- Si $x[n]$ y $h[n]$ son señales discretas y aperiódicas:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n - k] \xleftrightarrow{DTFT} Y(e^{j\Omega}) = X(e^{j\Omega})H(e^{j\Omega})$$



Convolución y modulación (III)

- Modulación aperiódica
 - Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales continuas y aperiódicas

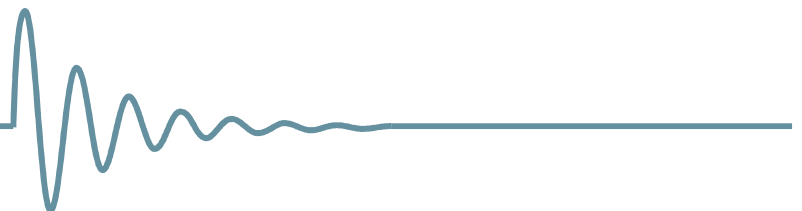
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) e^{j\nu t} d\nu$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\eta) e^{j\eta t} d\eta$$

Calculamos el producto de las dos señales:

$$z(t) = x(t)y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) Y(j\eta) e^{j(\nu+\eta)t} d\eta d\nu$$

Realizamos el siguiente cambio de variable: $\begin{cases} \omega = \nu + \eta \\ \eta = \omega - \nu \end{cases}$



Convolución y modulación (IV)

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) Y(j\omega - j\nu) d\nu \right) e^{j\omega t} d\omega$$

Reorganizando:

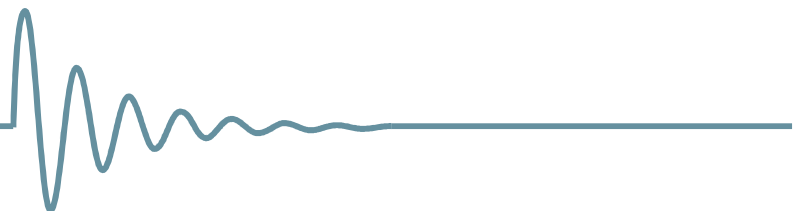
$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (X(j\omega) * Y(j\omega)) e^{j\omega t} d\omega \right]$$

$$z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

- Si $x[n]$ e $y[n]$ son dos señales discretas y aperiódicas

$$z[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFT} Z(e^{j\Omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\Omega}) \circledast Y(e^{j\Omega})$$

$$X(e^{j\Omega}) \circledast Y(e^{j\Omega}) = \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) Y(e^{j(\Omega-\theta)}) d\theta$$



Convolución y modulación (V)

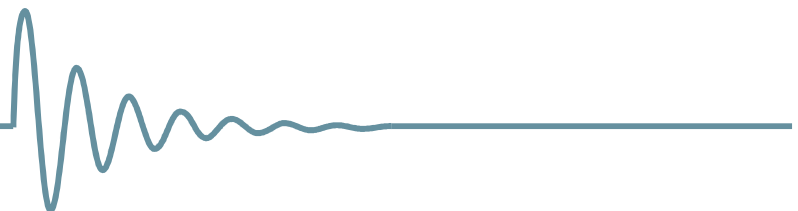
- Convolución periódica

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales continuas y T periódicas

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) = \int_{\langle T \rangle} x(\tau) y(t - \tau) d\tau; \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[k] e^{jk\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{\langle T \rangle} x(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[k] e^{jk\omega_0(t-\tau)} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y[k] e^{jk\omega_0 t} \int_{\langle T \rangle} x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] Y[k] e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$z(t) = x(t) \circledast y(t) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} Z[k] = TX[k]Y[k]$$



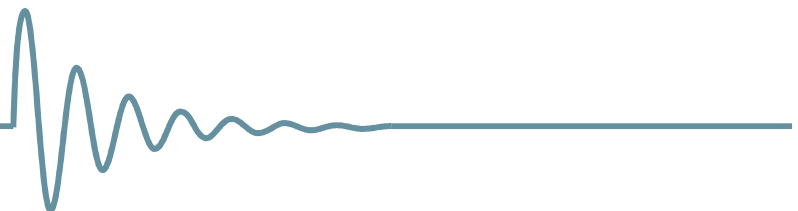
Convolución y modulación (VI)

- Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos señales discretas y N periódicas

$$z[n] = x[n] \odot y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} x[k]y[n-k]; \quad y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} Y[k]e^{jk\Omega_0 n}$$

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{l=\langle N \rangle} x[l]y[n-l] = \sum_{l=\langle N \rangle} x[l] \left(\sum_{k=\langle N \rangle} Y[k]e^{-jk\Omega_0 l} \right) e^{jk\Omega_0 n} = \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} Y[k]e^{jk\Omega_0 n} \sum_{l=\langle N \rangle} x[l]e^{-jk\Omega_0 l} = N \sum_{k=\langle N \rangle} Y[k]X[k]e^{jk\Omega_0 n} \end{aligned}$$

$$z[n] = x[n] \odot y[n] \xleftrightarrow{DTFS, \Omega_0} Z[k] = NX[k]Y[k]$$



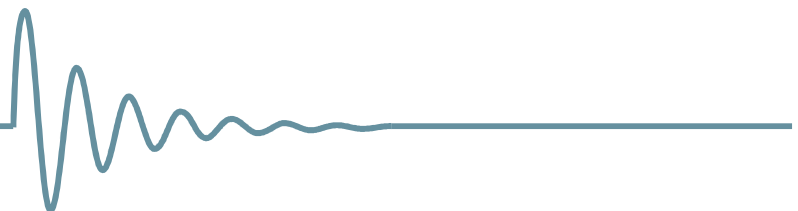
Convolución y modulación (VII)

- Modulación periódica

- Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos señales continuas y T periódicas

$$\begin{aligned} z(t) = x(t)y(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]e^{jm\omega_0 t} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Y[l]e^{jl\omega_0 t} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} X[m]Y[l]e^{j(m+l)\omega_0 t} = \left\{ \begin{matrix} k = m + l \\ l = k - m \end{matrix} \right\} = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[m]Y[k-m]e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (X[k] * Y[k])e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

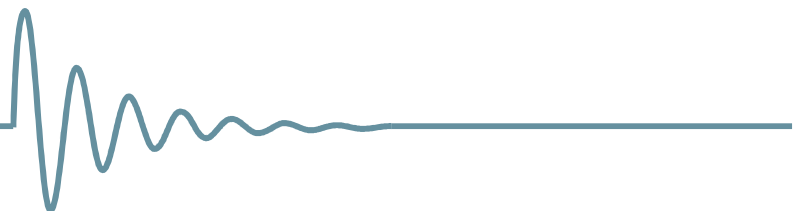
$$z(t) = x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS, \omega_0} Z[k] = X[k] * Y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Y[k-m]$$



Convolución y modulación (VIII)

- Si $x[n]$ e $y[n]$ dos señales discretas y N periódicas, entonces $X[k]$ e $Y[k]$ son también N periódicas

$$z[n] = x[n]y[n] \xleftrightarrow{DTFS, \Omega_0} Z[k] = X[k] \odot Y[k] = \sum_{m=\langle N \rangle} X[m]Y[k-m]$$



Relación de Parseval (I)

- La energía o potencia se conserva en la representación de Fourier
- Señales continuas aperiódicas
 - La energía para una señal aperiódica viene dada por:

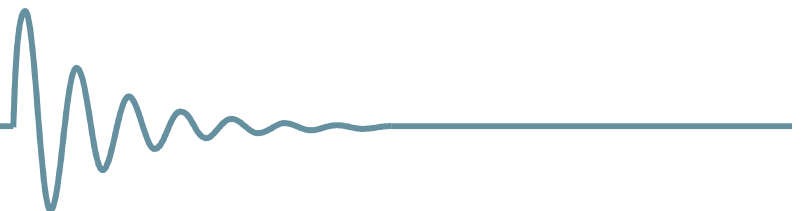
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt; \quad |x(t)|^2 = x(t)x^*(t)$$

Sabemos que

$$x^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Luego

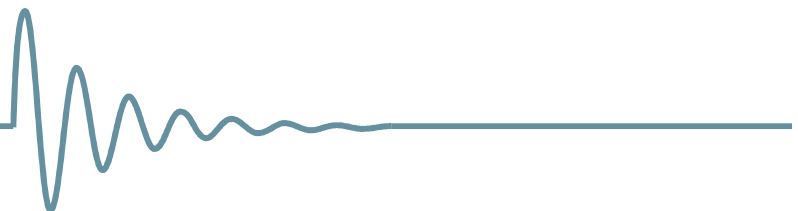
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega dt$$



Relación de Parseval (II)

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$
$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) X^*(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

- FT: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$
- FS: $\frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2$
- DTFT: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$
- DTFS: $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |X[k]|^2$



Dualidad (I)

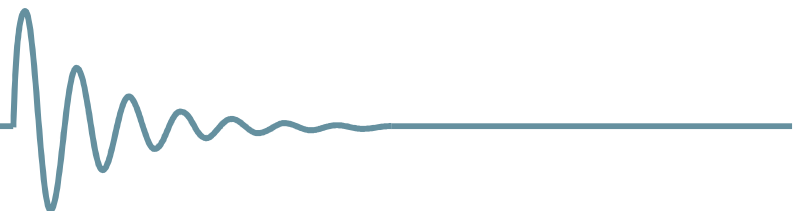
- Simetría dominio del tiempo y de la frecuencia

Pulso dominio tiempo	↔	SINC dominio frecuencia
SINC dominio tiempo	↔	Pulso dominio frecuencia
Impulso dominio tiempo	↔	CTE dominio frecuencia
CTE dominio tiempo	↔	Impulso dominio frecuencia

- Simetría propiedades de la representación

Convolución ↔ Multiplicación

DUALIDAD



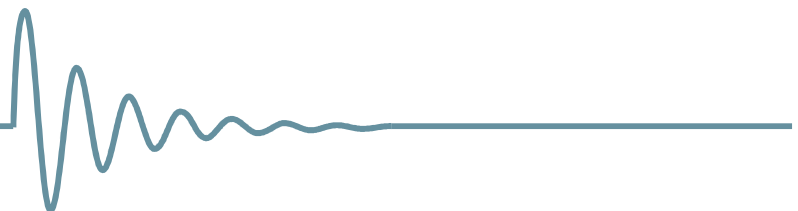
Dualidad (II)

- Transformada de Fourier (FT): relaciona señales continuas y aperiódicas en ambos dominios

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Consideremos la igualdad

$$y(v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\eta) e^{jv\eta} d\eta$$



Dualidad (III)

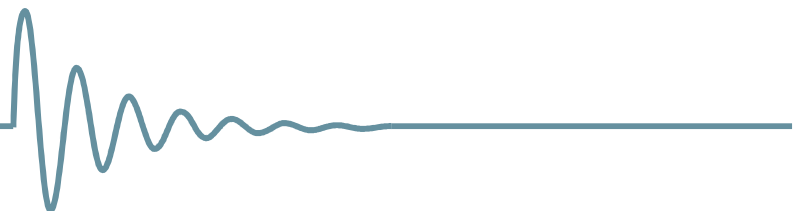
- Si $\nu = t$ y $\eta = \omega$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$
$$y(t) \xleftrightarrow{FT} Z(j\omega) \quad (*)$$

- Si $\nu = -\omega$ y $\eta = t$

$$y(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$z(t) \xleftrightarrow{FT} 2\pi y(-\omega) \quad (*)$$

- (*) implican cierta simetría entre tiempo y frecuencia



Dualidad (IV)

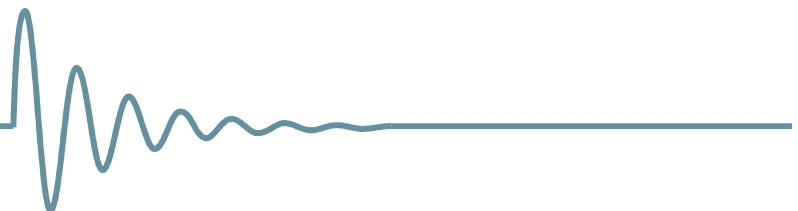
Dado el par:

$$f(t) \xleftrightarrow{FT} F(j\omega)$$

Intercambiando los papeles de tiempo y frecuencia

$$F(jt) \xleftrightarrow{FT} 2\pi f(-\omega)$$

- $F(jt)$: $F(j\omega)$ reemplazando ω por t
- $F(-\omega)$: $F(j\omega)$ reemplazando ω por t
- $F(-\omega)$: $f(t)$ como una función de la frecuencia reflejada ($-\omega$)

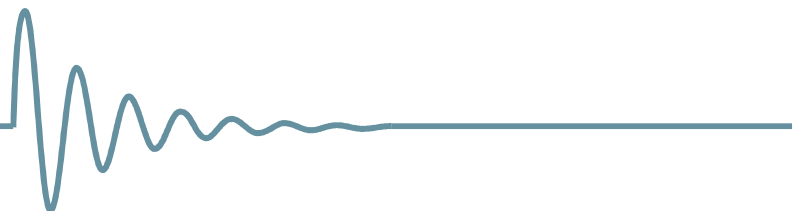


Dualidad (V)

- Series de Fourier (DTFS): relaciona señales discretas y periódicas en ambos dominios

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} X[k] e^{jk\Omega_0 n}$$
$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFS, \Omega_0} X[k]$$
$$X[n] \xleftrightarrow{DTFS, \Omega_0} \frac{1}{N} x[-k]$$



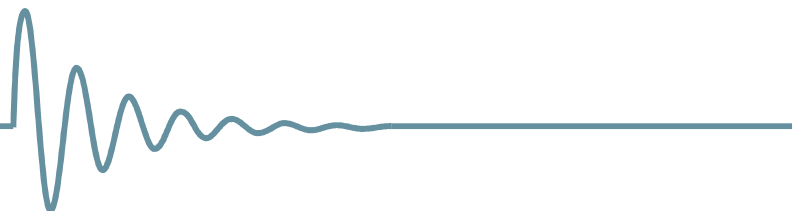
Dualidad (VI)

- DTFT – FS:
 - La FS transforma una función periódica continua en una función discreta aperiódica
 - La DTFT transforma una función aperiódica discreta en continua y periódica

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z[k] e^{jk_0 t}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

- Forzamos a $z(t)$ a ser 2π periódica, al igual que $X(e^{j\Omega})$ $\omega = 1$.
- Se ve que Ω en la DTFT se corresponde con t en la FS, mientras que n en la DTFT se corresponde con $-k$ en la FS



Dualidad (VII)

$$Z[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} z(t) e^{-jk} dt$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(e^{j\Omega}) e^{j\Omega n} d\Omega$$

- Los papeles de Ω y n en la DTFT se corresponden con t y $-k$ en la FS

$$\begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\Omega}) \\ X(e^{jt}) &\xleftrightarrow{FS,1} x[-k] \end{aligned}$$

